مبرهنة جيول – سنكلير
واستمرارية التشاكل في جبور – H^* –

عامر عبد الإله محمد*
و عمار عصام إدريس**

الملخص

في هذا البحث، عممت مبرهنة جيول – سنكلير لتشمل ليس فقط جبور باناخ التجميعية فحسب بل جبور باناخ غير التجميعية كذلك ، إن طريقتنا في توسيع مبرهنة جيول – سنكلير استندت إلى جبر المضروبات وأساليب أخرى، وهي طريقة قياسية شائعة الاستخدام في المدرسة الاسبانية .

فضلاً عن ذلك قدمنا مثالاً تطبيقياً لتعميمنا لمبرهنة جيول – سنكلير النتيجة المعروفة جيداً للعالم رودريكث والتي أثبت فيها صواب استمرارية التشاكل الشامل على جبور – H^* غير التجميعية ، علماً أن برهاننا لا يختلف كثيراً في خطوطه الرئيسة عن برهان رودريكث.

تاريخ استلام البحث: 2005/12/6م، تاريخ القبول: 2006/8/2م.
كلمات مفتاحية: الاستمرارية التلقائية ، جبر – H^* .

المقدمة

قدم ريكارت (1) في منتصف القرن العشرين مبرهنته الشهيرة التي تنص على أن التشاكل (homomorphism) بين جبور باناخ يكون مستمراً بشرط أن يكون المستقر للتشاكل كثيفاً (with a dense range homomorphism) وله الخاصية وهي أن يكون تقاطع المثاليات العظمى الموديولية للمستقر صفراً ، أي أن المستقر يكون قوياً شبه بسيط (strong semisimple) .

إن محاولة تضعيف شرط كون المستقر قوياً شبه بسيط إلى شبه بسيط (semisimple) أي أن تقاطع المثاليات العظمى للمستقر يكون صفراً ، لا تزال قيد الدراسة ونرى – حسب علمنا – أنها لم تحل حتى الأن . انظر[2] [3]، أي أن المسألة تؤول إلى الصيغة الاتية :

إذا كأن كل من A, B جبر باناخ و Φ تطبيقاً متشاكلاً ذا مستقر كثيف (a dense range homomorphism) من A إلى B بحيث أن B شبه بسيطة . فهل أن Φ مستمر ؟

* أستاذ مساعد، قسم الرياضيات / كلية التربية، جامعة الموصل – العراق.
** مدرس مساعد ، قسم أنظمة الحاسبات / المعهد التقني في زاخو، هيئة المعاهد التقنية – اقليم كردستأن العراق.

1. A. M. Sinclair, "**Automatic continuity of linear operator**", Cambridge University. Press, (1975).

2. T. W. Palmer, "**Banach algebra and the general theory of *–algebra**", Cambridge University. Press, (1994).

3. A. R. Villena, "**Automatic continuity in associative and non-associative context**", Irish Math. Soc. Bull., 46(2001), 43-76.

استطاع جونسن (1967) في بحثه [4] أن يعطي حلاً جزئياً للمسألة المفتوحة أعلاه كالآتي : إذا كأن كل من B, A جبر باناخ ، وإذا كأن Φ تطبيقاً متشاكلاً شاملاً(surjective homomorphism) من A إلى B بحيث أن B شبه بسيطة . عندئذ يكون Φ مستمراً .

ومنذ ذلك التاريخ فإن أكثر البحوث في موضوعات الاستمرارية التلقائية تستنبط افكارها وحلولها من مبرهنتي ريكارت وجونسن انظر [5].

استطاع سنكلير سنة 1979 مع جيول تعميم مبرهنة جونسن في بحثهما [6] كالآتي:

لتكن B جبر باناخ بحيث أن :

1. B ليس لها مثاليات ذات أبعاد منتهية غير صفرية معدومة القوى (has no non-zero finite dimensional nilpotent ideals)
2. لأية مثالية I مغلقة ذات بعد غير منته لـ B يوجد متتابعة $\{b_n\}_{n\in N} \subseteq B$ بحيث أن المتتابعة من المثاليات $\{(b_1 b_2 b_3 \cdots b_n \bar{I})\}_{n\in N}$ اليمينية المغلقة (closed right ideals) لـ B تكون متناقصة بثبات (constantly increasing) . عندئذ ، أي تشاكل شامل من أي جبر باناخ إلى B يكون مستمراً .

ومن الجدير بالتنويه أن البحوث بشأن مبرهنة جيول – سنكلير وجونسن وريكارت أعلاه اختصت بجبور باناخ التجميعية ونحن نرى أنه بالأمكأن دراسة تلك المبرهنات في حقل كبير وغني جداً وهو جبور باناخ غير التجميعية ، وفعلاً تم في كثير من البحوث تناول دراسة تلك المبرهنات في الحقول غير التجميعية . انظر [7] [8] [9] [10] .

لقد تناولنا في هذا البحث حقل (الجبور غير التجميعية) في موضوع الاستمرارية التلقائية للتطبيقات الخطية ودرسنا هذا الحقل في مبرهنة جيول – سنكلير المعممة واستطعنا تطبيق النتائج التي حصلنا عليها على جبور غير تجميعية هامة غير تافهة مثل جبور – *H.

نذكّر القارئ بأن هناك بحوثاً أحدثت قفزات عظيمة في هذه الاتجاهات ، نذكر منها [11]، علماً أن طريقة الحصول على الاستمرارية التلقائية لتطبيقات خطية معينة

4. B. E. Johnson, "**The uniqueness of the complete norm topology**", Bull. Amer. Math. Soc. 73(1967), 537 – 539.
5. A. M. Sinclair, "**Automatic continuity of linear operator**", Cambridge University. Press, (1975).
6. N. P. Jewell and A. M. Sinclair, "**Epimorphisms and derivations on $L^1(0,1)$ are continuos**", Bull. London Math. Soc., 8 (1979), 135 – 139.
7. A. P. Rodriguez, "**The uniqueness of the complete norm topology in complete non-associative algebra",** J. Functional Analysis, 60(1985), 1-15.
8. A. P. Rodriguez, "**Continuity of densely valued homomorphisms into H*–algebras**", Quart. J. Math. Oxford (2), 46 (1995), 107-118.
9. A. M. Sinclair, "**Continuous derivations on Banach algebra**", Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 166 – 170.
10. A. R. Villena, "**Continuity of derivations on H*–algebras**", Proc. Amer. Soc. 122 (1994), 821 – 826.
11. A. P. Rodriguez, "**Jordan structure in analysis**", in Jordan algebras Proc. Conf. Oberwolfach August 9-15, 1992, W. Kaup. McCrimmon and H. Peterson (eds), du Guryter, Berlin, 1994, 97 – 186.

(مثل تشاكل او اشتقاق) في جبور باناخ ليست بالضرورة تجميعية تختلف عما هو مألوف في الطرائق التجميعية وسنتناول في الفقرة الثالثة من هذا البحث تلك الطريقة بشيء من التفصيل، ولمزيد من التفصيلات يمكن الرجوع إلى [12] [13] عن الطرائق التجميعية وغير التجميعية في هذا المجال ، وقد خصصت الفقرة الرابعة لتقديم مثال تطبيقي يبرهن صواب تعميم مبرهنة جيول – سنكلير.

2. تمهيد

نذكر القارئ بالمصطلحات والتعاريف والمبرهنات الضرورية لإثبات مبرهنتنا الأساسية (مبرهنة جيول – سنكلير غير التجميعية).

إذا كأن $\|.\|$ معياراً على الجبر A فيقال أن الزوج $(A,\|.\|)$ هو جبر معياري(normed algebra) إذا تحقق الشرط الآتي :

$$a,b\in A \quad \text{لكل}$$

$$\|a.b\|\le\|a\|.\|b\|$$

وإذا كأن كل من Y,X فضاء باناخ ، و $T:X\to Y$ تطبيقاً خطياً . عندئذ يعّرف فضاء الأنفصال لـــ T (separating space of T) والذي يرمز له بالرمز $\delta(T)$ أو δ بالشكل الاتي :

$$\delta(T)=\{y\in Y:\exists\{x_n\}\subseteq X, \lim(x_n)=0, \lim T(x_n)=y\,,\, n\in N\}$$

نعرّف الطيف لعنصر a في جبر معياري A يحتوي على العنصر المحايد I هو المجموعة $Sp(A,a)$ الجزئية من الأعداد المعقدة والمعرّفة كالآتي :

$$Sp(A,a)=\{\lambda\in C:\lambda-aI\in Sing(A)\}$$

حيث $Sing(A)$ هي مجموعة العناصر التي ليس لها نظير (معكوس) في A . وتكتب $Sp(a)$ إذا لم يكن هناك التباس .

وكذلك نرمز للتماثل (isomorphism) بالرمز $\cong$.

سوف نرمز لحقل الأعداد المعقدة أو الحقيقية بالرمز K وإذا لم يكن هناك التباس لا نذكر الحقل.

أخيراً ، خلال هذا البحث عندما نذكر جبور معيارية كاملة نعني بذلك بأنها جبور باناخ ليست بالضرورة تجميعية وعندما نذكر جبور باناخ فقط نعني بذلك بأنها جبور باناخ تجميعية.

2. 1 مبرهنة البيأن المغلق: Closed Graph Theorem

Y,X

$T:X\to Y$.

$G(T)$ T .

---

12. M. Cabrera, J. Martinez and A. P. Rodriguez, "**Non-associative real H*–algebra**", Publ. Mat. 32(1988),267-274.
13. A. P. Rodriguez, "**Jordan structure in analysis**", in Jordan algebras Proc. Conf. Oberwolfach August 9-15, 1992, W. Kaup. McCrimmon and H. Peterson (eds), du Guryter, Berlin, 1994, 97 – 186.

2. 2 قضية (Proposition) : [14]

ليكن كل من Y,X فضاء باناخ ، وليكن Φ تطبيقاً خطياً من X إلى Y فأن :

1. التطبيق Φ مستمر إذا وفقط إذا كـأن $\delta(\Phi)=\{0\}$.
2. إذا كأن كل من T و R تطبيقين خطيين مستمرين على X , Y علـى الترتيـب وكأن :

$$\Phi T = R\Phi$$

فأن

$$R\delta(\Phi)\subseteq\delta(\Phi)$$

2. 3 مساعده (Lemma) : [15]

ليكن A و B جبور معيارية . إذا كانت $\Phi : A\to B$ تشاكلاً شاملاً فأن $\delta(\Phi)$ تكون مثالية مغلقة لـ B .

2. 4 مبرهنة سنكلير : Sinclair Theorem

ليكن كل من Y,X فضاء باناخ ، وليكن Φ تطبيقاً خطياً من X إلى Y ، إذا كانت المتتابعتان

$$\{T_n\}_{n\in N}\subseteq BL(X)$$
$$\{R_n\}_{n\in N}\subseteq BL(Y)$$

تحققان الشرط الاتي :

$$\forall\ n\in N \qquad \Phi T_n = R_n\Phi$$

فعندئذ يوجد عدد صحيح k بحيث أن :

$$\forall \quad n\ge k$$
$$\left(R_1\ldots R_n\delta(\Phi)\right)^{-} = \left(R_1\ldots R_k\delta(\Phi)\right)^{-}$$

-**البرهان:** انظر ([16] , مبرهنة 6-1-17)

2. 5 مساعدة

ليكن كل من Y,X فضاء باناخ ، وليكن Φ تطبيقاً خطياً شـاملاً مـن X إلـى Y ولتكن $\{F_n\}_{n\in N}$ متتابعة من مؤثرات خطية مستمرة على X تقترب تحت المعيار على $BL(X)$ إلى الصفر . إذا كانت $\{G_n\}_{n\in N}$ متتابعة من مؤثرات خطية مستمرة ومتراصة على Y تقترب إلى مؤثر خطي متراص G على Y بحيث أن المـساواة $\Phi F_n = G_n\Phi$ صحيحة لكل $n\in N$. عندئذ

$Sp(G)=\{0\}$.

-**البرهان** : انظر ([17] , صفحة 110)

2. 6 مبرهنة نكاتا – هـيكمن : Nagata-Higman Theorem [18]

ليكن A جبراً ولتكن I مثاليـة لـ A بحيث أن لكل $x\in I$ يوجد عـدد صـحيح موجب p يحقق $x^p=0$. عندئذ يوجد عدد صحيح موجب k بحيث أن $I^k=\{0\}$.

14. A. M. Sinclair, “**Automatic continuity of linear operator**”, Cambridge University. Press, (1975).

15. A. R. Villena, “**Continuity of derivations on H*–algebras**”, Proc. Amer. Soc. 122 (1994), 821 – 826.

16. T. W. Palmer, “**Banach algebra and the general theory of *–algebra**”, Cambridge University. Press, (1994).
17. A. P. Rodriguez, “**Continuity of densely valued homomorphisms into H*–algebras**”, Quart. J. Math. Oxford (2), 46 (1995), 107-118.
18. N. Jacobson, “**Structure of rings**”, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 38, providence R. I. (1968).

ليكن A جبراً. نرمز لجبر المضروبات (multiplication algebra) بالرمز $M(A)$ ويعرف بأنه الجبر الجزئي من $L(A)$ (الجبر التجميعي لجميع المؤثرات الخطية من A إلى A) والمولد بالمؤثرات الخطية الاتية :

L_a , R_a , Id_A

إذ

$L_a : A \to A$ (left multiplication operator on A by an element a in A)

$x \mapsto L_a(x) = ax$

$R_a : A \to A$ (right multiplication operator on A by an element a in A)

$x \mapsto R_a(x) = xa$

$Id_A : A \to A$

$x \mapsto Id_A(x) = x$ (identity operator)

لكل $x, a \in A$

هي مؤثرات ضرب يسارية ويمينية وذاتية على التوالي.

وليكن A جبرا ولتكن I مثالية لـ A . نرمز لمثالية جبر المضروبات $M(A)$ لـ A المولّدة بالمؤثرات الخطية R_x, L_x لكل $x \in I$ بالرمز M_I . كما تكتب M_I بالشكل

$$M_I = \sum_{i=1}^{n} M_{x_i, y_i} \qquad (x_i, y_i \in I)$$

حيث

$M_{x_i, y_i} : A \to A$

$a \mapsto M_{x_i, y_i}(a) = x_i \, a \, y_i$

(two-sided multiplication operator on A by the elements x_i, y_i in A)

2. 7 مبرهنة جيول – سنكلير التجميعية : Jewell-Sinclair Theorem

لتكن B جبر باناخ بحيث أن :

1. B ليس لها مثاليات ذات أبعاد منتهية غير صفرية معدومة القوى .
2. لأية مثالية I مغلقة ذات بُعد غير منتهٍ لـ B يوجد متتابعة $\{b_n\}_{n \in N} \subseteq B$ بحيث أن المتتابعة $\{(b_1.b_2 \ldots b_n I)^-\}_{n \in N}$ من المثاليات اليمينية المغلقة لـ B تكون متناقصة بثبات. عندئذ أي تشاكل شامل من أي جبر باناخ إلى B يكون مستمراً .

البرهان : انظر [19] , مبرهنة 6-1-18)

2. 8 قضية (Proposition) : [20]

ليكن كل من B, A جبور معيارية ، وليكن التطبيق $\Phi : A \to B$ تشاكلاً شاملاً. عندئذ يكون التطبيق $\hat{\Phi} : M(A) \to M(B)$ تشاكلاً شاملاً . على وفق العلاقة :

$$\Phi \circ F = \hat{\Phi}(F) \circ \Phi$$

حيث $F \in M(A)$

القضية الآتية تعود إلى ميغيل كابريرا لإحدى محاضراته في التحليل غير المنشورة

19. T. W. Palmer, "**Banach algebra and the general theory of *–algebra**", Cambridge University. Press, (1994).
20. A. P. Rodriguez, "**Continuity of densely valued homomorphisms into H*–algebras**", Quart. J. Math. Oxford (2), 46 (1995), 107-118.

(21) والتي أيضا يمكن إيجادها بدون توضيحات في المصدر (22).

2. 9 قضية :

إذا كأن Φ تشاكلاً شاملاً من جبر معياري A إلى جبر معياري B ، فإن

1. $\delta(\hat{\Phi})(B) \subseteq \delta(\Phi)$
2. $L_{\delta(\Phi)} \cup R_{\delta(\Phi)} \subseteq \delta(\hat{\Phi})$

إذ $\hat{\Phi} : M(A) \to M(B)$ هو تشاكل شامل وأن

$$L_{\delta(\Phi)} = \{L_x : x \in \delta(\Phi)\}$$
$$R_{\delta(\Phi)} = \{R_x : x \in \delta(\Phi)\}$$

– البرهان :

1. لتكن $T \in \delta(\hat{\Phi})$ ولتكن $\{F_n\} \subseteq M(A)$ متتابعة من المؤثرات المستمرة في $M(A)$ بحيث أن $\{\hat{\Phi}(F_n)\} \to T$, $\{F_n\} \to 0$ [حسب تعريف فضاء الأنفصال لـ $\hat{\Phi}$].

ومن خواص المتتابعات نحصل على أنه لأي عنصر $a \in A$ فأن :

$$\{F_n(a)\} \to 0$$
$$\{\Phi(F_n(a))\} = \{(\Phi \circ F_n)(a)\}$$
$$= \{(\hat{\Phi}(F_n) \circ \Phi)(a)\}$$
$$= \{\hat{\Phi}(F_n)(\Phi(a))\} \to T(\Phi(a))$$

ومنه نستنتج أنه يوجد متتابعة $\{F_n(a)\}$ في A بحيث أن

$$\{F_n(a)\} \to 0 \qquad , \qquad a \in A$$
$$= \{\hat{\Phi}(F_n)(\Phi(a))\} \to T(\Phi(a))$$

وهذا يعني أن $T(\Phi(a)) \in \delta(\Phi)$ لكل $T \in \delta(\hat{\Phi})$ ولكل $a \in A$ بمعنى أن

$$\delta(\hat{\Phi})(\Phi(A)) \subseteq \delta(\Phi)$$

وبما أن التطبيق Φ شامل نحصل على أن

$$\delta(\hat{\Phi})(B) \subseteq \delta(\Phi).$$

2. إذا كأن $b \in \delta(\Phi)$ و $\{a_n\}$ متتابعة تقترب إلى الصفر في A بحيث أن

$$\{\Phi(a_n)\} \to b$$

فأن $\{L_{a_n}\}$ هي متتابعات تقترب إلى الصفر في $M(A)$ بحيث أن

$$\{\hat{\Phi}(L_{a_n})\} = \{L_{\Phi(a_n)}\} \to L_b$$

[حسب تعريف فضاء الأنفصال لـ $\hat{\Phi}$ وخاصية المؤثر R ، L] وهذا يؤدي إلى أن $L_b \in \delta(\hat{\Phi})$. وبطريقة مماثلة نجد أن $R_b \in \delta(\hat{\Phi})$.

3. النتائج الأساسية The Main Results

سنقدم في هذا الفقرة تعميمنا لمبرهنة جيول – سنكلير ، ومحورها هو هل تصح هذه المبرهنة في صيغتها غير التجميعية بفرض أن B هي جبر معياري كامل ؟ وليس هدفنا من هذا السؤال دراسة جبور باناخ التجميعية فحسب بل جبور باناخ غير التجميعية ايضاً .

---

21. M. Cabrera, **Lectures notes in analysis**, University of Granada,(2000)
22. A. P. Rodriguez, "**Continuity of densely valued homomorphisms into H*–algebras**", Quart. J. Math. Oxford (2), 46 (1995), 107-118.

أن المشكلة الأساسية في توسيع مبرهنة جيول – سنكلير لتشمل الجبور غير التجميعية هو فقرها إلى هيكلية تحليلية وجبرية تمكننا من إثبات هدفنا وهو استمرارية التشاكل بين تلك الجبور ، فمثلا ليس للطيف(Spectrum) في الجبور غير التجميعية معنى بسبب كون العناصر في الجبور غير التجميعية قد يكون له معكوسأن وعليه لا يمكن استخدام جميع المبرهنات والقضايا المتعلقة بالطيف في الجبور غير التجميعية ، ومن الجدير بالذكر أن المبرهنات التي يستخدم فيها الطيف تعد محور مهم في موضوع الاستمرارية التلقائية (انظر برهان مبرهنة جيول – سنكلير التجميعية) ، لم يتمكن الباحثون – على حد علمنا – من ايجاد طريقة بديلة تعوض استخدام المبرهنات التي يستخدم فيها الطيف ، لذا حاول الباحثون جميعاً نقل تلك الجبور داخل جبور تجميعية ليتمكنوا من الاستفادة من المبرهنات التي يستخدم فيها الطيف فضلاً عن المساعدات والقضايا الاخرى ، وبالامكأن تشبيه هذه الطريقة ببناء جسر بين الجبور غير التجميعية و الجبور التجميعية.

3. 1 مبرهنة جيول – سنكلير المعممة :

ليكن B جبراً معيارياً كاملاً بحيث أن:

1. لأية مثالية I لــ B منتهية البعد بحيث أنه يوجد عدد طبيعي $n \in N$ يحقق $M_I^n = 0$ فأن $I = 0$.
2. لأية مثالية مغلقة I لــ B غير منتهية البعد ، يوجد متتابعة $\{T_n\}_{n\in N} \subseteq M(B)$ من مؤثرات خطيه على B بحيث أن المتتابعة $\{(T_1T_2 \cdots T_n \bar{I})\}_{n\in N}$ من المثاليات اليمينية المغلقة لــ B تكون متناقصة بثبات . عندئذ ، يكون أي تشاكل شامل من أي جبر معياري كامل إلى B مستمراً.

البرهان:

<u>**الحالة الأولى:**</u> نفرض أن كلاً من B, A جبر باناخ و $\Phi : A \to B$ تشاكل شامل.

لاحظ أنه إذا كانت B تجميعية و I مثالية لــ B منتهية البعد بحيث أن

$$M_I^n = 0$$

نحصل على

$$\begin{aligned} M_I &= \sum_{i=1}^{n} M_{x_i, y_i} \quad , \\ & x_i, y_i \in I \\ &= M_{x_1,y_1} + M_{x_2,y_2} + \ldots + M_{x_n,y_n} \\ &= M_{x_1+\ldots+x_n,\, y_1+\ldots+y_n} \\ &\cong M_{x,y} \quad , \qquad x, y \in I \end{aligned}$$

إذا كانت

$$M_I^n = 0$$

نحصل على

$$M_{x_1,y_1} \ldots M_{x_n,y_n} = 0$$

وعليه لكل $b \in B$ نحصل على

$$\left(M_{x_1,y_1} \ldots M_{x_n,y_n}\right)(b) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 \ldots x_{n-1}\, x_n\, b\, y_n\, y_{n-1} \ldots y_1 = 0$$

بوضع

$$z = by_n \in I$$

$$x_1 \ldots x_n z y_{n-1} \ldots y_1 = 0$$

ومنه نجد أن

$$I^n = 0 \Rightarrow I = 0$$

والأن , بتطبيق مبرهنة جيول – سنكلير التجميعية (2-7) نحصل على أن Φ مستمر.

أما إذا كانت I مثالية لـ B غير منتهية البعد نحصل على أن المتتابعة $\left\{(b_1 \ldots b_n I)^{-}\right\}_{n\in N}$ متناقصة بثبات لأنه إذا وضعنا

$$\{T_n\}_{n\in N} = \{L_{b_n}\}_{n\in N} \subseteq M(B) \ ,$$
$$T_n(I) = L_{b_n}(I)$$

نحصل على المطلوب ، ومرة أخرى حسب مبرهنة جيول – سنكلير التجميعية (2–7) نحصل على أن Φ مستمر.

<u>الحالة الثانية</u>: نفرض أن كلاً من B, A جبور معيارية كاملة. و $\Phi : A \to B$ هو تشاكل شامل .

حسب القضية (2–8) نحصل على

$$\hat{\Phi} : M(A) \to M(B)$$

هو تشاكل شامل ايضاً .

حسب المساعدة (2–3) فإن كلاً من $\delta(\hat{\Phi}), \delta(\Phi)$ هي مثالية مغلقة لـ B ولـ $M(B)$ على التوالي .

الآن ، نفرض أن $\delta(\Phi)$ غير منتهية البعد.

بحسب الفرضية ، يوجد متتابعة

$$\{T_n\}_{n\in N} \subseteq M(B)$$

بحيث أن

$$\left\{(T_1 \ldots T_n \delta(\Phi))^{-}\right\}$$

متناقصة بثبات .

وبما أن $\hat{\Phi}$ شامل نحصل على أن لكل $n \in N$ ولكل $T_n \in M(B)$ يوجد $F_n \in M(A)$ بحيث أن

$$\hat{\Phi}(F_n) = T_n$$

ويحقق العلاقة

$$\Phi \circ F_n = T_n \circ \Phi$$

وبتطبيق مبرهنة سنكلير (2–4) نحصل على تناقض وذلك بوضع $X = A$, $Y = B$, $\Phi = \Phi$, $F_n = T_n$ $T_n = R_n$, اذن يجب أن تكون $\delta(\Phi)$ منتهية البعد .

وبحسب القضية (2–9) نحصل على

$$\delta(\hat{\Phi})(B) \subseteq \delta(\Phi) \qquad \ldots(1)$$
$$M_{\delta(\Phi)} = R_{\delta(\Phi)} \cup L_{\delta(\Phi)} \subseteq \delta(\hat{\Phi}) \quad \ldots(2)$$

نُثبّت T في $M_{\delta(\Phi)}$. حسب (2)

$$T \in \delta(\hat{\Phi}) \subseteq M(B) = \hat{\Phi}\big(M(A)\big)$$

حيث أن $\hat{\Phi}$ شامل.

ومنها نستنتج وجود $S \in M(A)$ بحيث أن

$$T = \hat{\Phi}(S)$$

لاحظ أن $T \in \delta(\hat{\Phi})$ يؤدي إلى وجود $\{F_n\} \subseteq M(A)$ بحيث أن

$$F_n \to 0$$

وكذلك

$$\hat{\Phi}(F_n) \to T$$

وهذا يؤدي إلى

$$F_n S \to 0$$

وكذلك

$$\hat{\Phi}(F_n)\hat{\Phi}(S) \to T\hat{\Phi}(S)$$

وهذا يكافئ

$$F_n S \to 0$$

وكذلك

$$\hat{\Phi}(F_n S) \to T^2$$

من (1) نحصل على أن T لها مستقر ذو بعد منته (finite dimension range) .

والآن وبتطبيق المساعدة (2–5) بوضع

$$X = A, \qquad Y = B \ , \qquad \Phi = \Phi$$

$\{F_n\} = \{F_n S\}$ متتابعة من مؤثرات خطية مستمرة على A وتقترب من الصفر.

$\{G_n\}=\{\hat{\Phi}(F_nS)\}$ متتابعة من مؤثرات خطية مستمرة ومتراصة على B (السبب لكل $n\in N$ $\hat{\Phi}(F_nS)=\hat{\Phi}(F_n)T$ ولكل $x\in B$ نحصل على $\hat{\Phi}(F_nS)(x)=\hat{\Phi}(F_n)T(x)$ وهذا يعني أن التطبيق $\hat{\Phi}(F_nS)$ له مستقر ذو بعد منته وعليه يكون متراصاً) تقترب إلى مؤثر خطي متراص $G=T^2$ ، نحصل على

$$Sp(T^2)=\{0\}$$

نفرض أن بُعد فضاء الأنفصال $\delta(\Phi)$ هو p ، أي أن

$$\dim\delta(\Phi)=p$$

وعليه نجد أن

$$\dim(\delta(\hat{\Phi}))\leq p$$

وعليه T^2 تحقق متعددة حدود من الرتبة $p+1$ لأن $Sp(T^2)=\{0\}$

وهذا يعني أن

$$(T^2)^{p+1}=0$$

أي أن

$$T^{2p+2}=0$$

وبما أن p لا تعتمد على T ، وبتطبيق مبرهنة نكاتا – هيكمن (2-6) نحصل على :

$$\exists \quad n\in N \quad : \quad M^n_{\delta(\Phi)}=0$$

وبحسب الفرضية (1) من المبرهنة نحصل على

$$\delta(\Phi)=\{0\}$$

وبحسب القضية (2-2) فرع (1) يكون التطبيق Φ مستمرا .

4. دراسة تطبيقية على جبور – H^*

سنقدم من خلال هذه الفقرة الإجابة عن عدد مما قد يتبادر إلى ذهن القارئ من أسئلة وشكوك عن جدوى توسيع مبرهنة جيول – سنكلير وذلك من خلال تقديم مثال تطبيقي لتعميمنا لمبرهنة جيول – سنكلير نستخدم فيه حقلا هاما غير تافه وهو جبور H^*- . منذ أن قدم امبروس (A. Ambrose) بحثه [23] سنة 1945 عن جبور H^*- التجميعية (على الحقل C) وتمهيده للنظريات الهيكلية التابعة لها ، بدأ حقل جبور H^*- يتطور في اتجاهات عدة أهمها:

I. في المحتوى التجميعي

أوجد كابلأنسكي (I. Kaplansky) هيكلية جبور- H^* الحقيقية التجميعية [24].

وعرف ساورو تنو (P. Saworotnow) موديلات هلبرت على جبور – H^* التجميعية وبدأ بدراستها [25].

II. في المحتوى غير التجميعي

كأن لأفكار امبروس (A. Ambrose) أثر كبير في الدخول إلى المحتوى غير التجميعي لأصناف مشهورة ومهمة مثل جبور جوردن (Jordan) [26]والبديلة [27]

23. W. Ambrose, "**Structure theorems for a class of Banach algebras**" Trans. Amer. Math. Soc. 57 (1945), 364-386.
24. I. Kaplansky, "**Dual rings**" Ann. Math.49 (1948), 689-701.
25. P. P. Saworotnow, "**A generalized Hilbert space**", Duke Math. J. 35 (1968), 191-197.
26. C. Viola Devapakkiam, "**Hilbert space method in the theory of Jordan algebras II**", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79 (1976), 307-319.
27. D. G. Perez, "**Structure theorems for alternative H*-algebra**", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 94 (1983), 437-446.

فضلا عن لــ مالسيف (Mal'cev) [28] .

ووضع كوينكا و رودريكــث (Cuenca and Rodriguez) الجأنـــب النظـــري لجبور–H^* غير التجميعية العامة (انظر [29]).

ويجدر بالذكر هنا ، أن دراسة جبور – H^* غير التجميعية يمكن أن تتحول على نحوٍ سهل جداً إلى دراســة جبــور – H^* المعدومــة صفرياً ويبقى التحول إلى دراسة جبور – H^* التي تكون تبولوجيـاً بـسيطة هـي الحالـة المرغوب فيهـا انظـر [[30]،[31]،[32]]. والآن نذكر القاريء بأهم التعاريف والقضايا التـي نحتاج إليها في مثالنا التطبيقي.

يعرّف جبر– H^* (على الحقل K) بأنــه جبر A غير التجميعي (على الحقل K) مــع التشابك * (involution) الذي يسمى تشابك جبر–H^* لــ A . كما يمكن أن يعرّف على أنه فضاء هلبرت (على الحقل K) بحيــث أن الجداء الداخلي $\langle\ ,\ \rangle$ يحقق الاتي :

$$\langle xy,z\rangle=\langle x,zy^*\rangle=\langle y,x^*z\rangle\ \forall x,y,z\in A$$

ونعرف التشابك علـــى الجبـــر A بأنـــه التطبيق * من A إلى A و يحقق الشروط آلاتية :

$$\left.\begin{array}{l}(a+b)^*=a^*+b^*\\(\lambda a)^*=\bar{\lambda}\,a^*\\(ab)^*=b^*\,a^*\\(a^*)^*=a\end{array}\right\}$$
$$\forall\ a,b\in A,\lambda\in K$$

ويـــسمى التطبيـــق * بالتـــشابك الجبـــري (algebrainvolution) .

لتوضيح المثال التطبيقي سنحتاج إلى عدد من المصطلحات والقضايا والمبرهنات ونبدأ بالآتي :

يقال إن الجبر A هو أولي إذا كــأن لأي مثاليتين I,J لــ A بحيــث أن $I.J=0$ يؤدي إلى $I=0$ أو $J=0$. ويقــال إن A بسيطة تبولوجياً إذا كأن $A^2\neq 0$ وإذا لم تحتوِ على مثاليات مغلقه فعلية .

فإذا كأن A جبــراً (علــى الحقــل K) ونعرف مركز A (Center of A) الــذي يرمز له بالرمز $Cent(A)$ بالصيغة :

$$Cent(A)=\{x\in A: xa=ax\ \forall\ a\in A\ ,(bc)a=b(ca)\ \forall\ a,b,c\in A\}$$

وإذا كأن A جبراً أولياً (على الحقل K) ونعـــــــرف المركـــــــز الموســــــع (Extended Centeroid) الذي يرمــز لــه بالرمز $C(A)$ بالصيغة الآتية :

$$C(A)=\{f:I\to A: f(xa)=f(x)a\ ,f(ax)=af(x)\quad,\forall a\in A\,,x\in I\}$$

حيث أن I مثالية غير صفرية لــ A .

28. M. Cabrera, J. Martinez and A. Rodriguez, "**Mal'cev H*-algebra**", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 103 (1988), 2905-2945.
29. J. A. Cuenca and A. P. Rodriguez, "**Structure theory for non- communicative Jordan H*–algebra**", J. Algebra 106 (1987). 22-34.
30. M. Cabrera, J. Martinez and A. P. Rodriguez, "**Hilbert modules over H*–algebra in relation with Hilbert ternary**", in workshop on non-associative algebraic models, Nova Science Publisher, New York (1992), pp. 33 – 44.
31. J. A. Cuenca and A. P. Rodriguez "**Isomorphisims of H*-algebra**", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 97 (1985), 93-99.
32. A. P. Rodriguez, "**Continuity of densely valued homomorphisms into H*–algebras**", Quart. J. Math. Oxford (2), 46 (1995), 107-118.

لاحظ أن الاحتواءات الآتية $K \subseteq Cent(A) \subseteq C(A)$ معطاة حسب التطبيقات المعرفة كآلاتي :

$$K \xrightarrow{Id\,A} Cent(A) \xrightarrow{L} C(A)$$
$$x \longrightarrow L_x$$

وهذه التطبيقات هي تطبيقات متشاكلة ومتباينة (injective and homomorphism) .

ويقال أن A مغلق مركزياً (على الحقل K) إذا كأن لكل مثالية I غير صفرية لـA ولكل تطبيق خطي $f: I \to A$ يحقق

$$f(xa) = f(x)a, f(ax) = af(x)$$
$$\forall \quad x \in I, a \in A$$

يوجد $\lambda \in K$ بحيث أن $f(x) = \lambda x$ لكل $x \in I$ وبعبارة أخرى $C(A) \cong K$.

بقي أن نذّكر بأن معدومة A تعرف بالشكل الاتي:

$$Ann(A) = \{x \in A: L_x = R_x = 0\}$$

ويقال بأن A معدومة صفرياً إذا كأن $Ann(A) = \{0\}$.

4. 1 مساعدة : [33]

ليكن A جبراً معيارياً كاملاً ولتكن B جبراً H^*– معدومة صفرياً و بسيطة تبولوجيا، وليكن التطبيق Φ شاملاً من A إلى B ، أن وجد عنصر غير صفري في جبر المضروبات $M(B)$ ذو مستقر منتهي البعد عندئذ يكون التطبيق Φ مستمراً.

33. A. P. Rodriguez, "**Continuity of densely valued homomorphisms into H*–algebras**", Quart. J. Math. Oxford (2), 46 (1995), 107-118.

4. 2 مساعدة : [34]

ليكن A جبراً أولياً مغلقاً مركزياً بحيث أن $\dim(T(A)) > 1$ لجميع المؤثرات $T \neq 0$ تنتمي لجبر المضروبات $M(A)$. عندئذ توجد متتابعة $\{C_n\}_{n \in N} \subseteq A$ و $\{T_n\}_{n \in N} \subseteq M(A)$ بحيث أن :

$$T_n.T_{n-1} \ldots T_1\, C_n \neq 0$$
$$T_{n+1}.T_n \ldots T_1\, C_n = 0, \qquad \forall n \in N$$

4. 3 مساعدة : [35]

ليكن D جبراً ولنفرض وجود ثنائي خطي غير موّلد متناظر تجميعي بالصيغة $\langle .,. \rangle$ في D . عندئذ :

1) يوجد تشابك جبري وحيد # في جبر المضروبات $M(D)$ يحقق ما يأتي :

$$L_d^{\#} = R_d \quad , \quad R_d^{\#} = L_d \qquad \forall \; d \in D$$

2) لكل x, y في D ولكل T في $M(D)$ تكون المساواة الآتية صحيحة

$$\langle Tx\,, y \rangle = \langle x, T^{\#}(y) \rangle$$

4. 4 مبرهنة : [36]

كل جبر–*H هو جمع متعامد (orthognal sum) للمعدومة له و جبر – H^* معدومة صفرياً.

34. A. R. Villena, "**Continuity of derivations on H*–algebras**", Proc. Amer. Soc. 122 (1994), 821 – 826.
35. A. P. Rodriguez, "**Continuity of densely valued homomorphisms into H*–algebras**", Quart. J. Math. Oxford (2), 46 (1995), 107-118.
36. A. R. Villena, "**Continuity of derivations on H*–algebras**", Proc. Amer. Soc. 122 (1994), 821 – 826.

4. 5 مبرهنة : [37]

كل جبر H^*- معدوم صفرياً يكون عبارة عن أنغلاق تعامد مجموع المثاليات المغلقة الصغرى للجبر H^*- وهذه المثاليات هي جبور H^*- بسيطة تبولوجياً .

4. 6 مبرهنة :

جبور H^*- التي تكون بسيطة تبولوجياً والمعرفة على حقل الأعداد المعقدة تكون جبور أوليه مغلقة مركزياً .

سنقدم الآن مثالاً تطبيقياً يثبت صواب تعميم مبرهنة جيول – سنكلير وهي مبرهنة عائدة إلى العالم رودريكث (نظرية 5 – [38])

أثبتت استمرارية التشاكل الشامل بين الجبور المعيارية الكاملة.

إن برهاننا في المثال التطبيقي لمبرهنة جيول – سنكلير المعممة لا يختلف كثيراً في خطوطه الرئيسة عن برهان رودريكث .

4. 7 مبرهنة : (المثال التطبيقي)

ليكن كل من B, A جبور H^*- (على حقل الأعداد المعقدة) ، وليكن التطبيق Φ متشاكلاً وشاملاً من A إلى B . فإذا كانت B معدومة صفرياً فإن Φ مستمرة.

37. A. R. Villena, "**Continuity of derivations on H*–algebras**", Proc. Amer. Soc. 122 (1994), 821 – 826.
38. A. P. Rodriguez, "**Continuity of densely valued homomorphisms into H*–algebras**", Quart. J. Math. Oxford (2), 46 (1995), 107-118.

البرهان :

نفرض أولا أن B بسيطة تبولوجياً. وبتطبيق المبرهنة (4–6) نجد أن B هو جبر أولي مغلق مركزياً. والأن $M(B)$ تحقق أحد الاحتماليين الآتيين :

(i) يوجد عنصر في $M(B)$ له مستقر ذو بعد منتهٍ .

(ii) جميع عناصر $M(B)$ لها مستقرات ذات أبعاد غير منتهية .

برهان (i) Φ تكون مستمرة حسب المساعدة (4–1) .

بحيث أن

$$T_{n+1}.T_n \ldots T_1 C_n = 0 \quad \ldots(3)$$
$$T_n.T_{n-1} \ldots T_1 C_n \neq 0 \quad \ldots(4)$$

وباستخدام حقيقة كون أن كل جبر H^*- معدوم صفرياً يحتوي على ثنائي خطي غير مولد متناظر تجميعي مستمر بالصيغة $\langle .,. \rangle$ عندئذ، وبحسب المساعدة (4–3 (1)) يوجد تشابك جبري # على جبر المضروبات $M(B)$ ويحقق الخاصية الآتية:

$$L_b^{\#} = R_b \quad , \quad R_b^{\#} = L_b \quad \forall b \in B \ldots(5)$$

الآن ، إذا وجد عدد صحيح موجب $n \in N$ بحيث أن

$$\overline{T_1^{\#} \ldots T_n^{\#}(B)} = \overline{T_1^{\#} \ldots T_{n+1}^{\#} (B)} \quad ..(6)$$

بمعنى أن المتتابعة $\{T_n^{\#}\}_{n \in N} \subseteq M(B)$ تكون مستقرة .

وبما أن $T_{n+1}.T_n \ldots T_1 C_n = 0$ حسب (3)، والتطبيق $\langle .,. \rangle$ غير مولّد نحصل على $0 = \langle B, T_{n+1} \ldots T_1(C_n) \rangle$

$=\left\langle B,\left((T_{n+1}\dots T_1)^{\#}\right)^{\#}(C_n)\right\rangle$

[باستخدام تعريف التشابك الجبري]

$=\left\langle (T_{n+1}\dots T_1)^{\#}(B),C_n\right\rangle$

[بحسب المساعدة (4-3(2))]

$=\left\langle (T_1^{\#}\dots T_{n+1}^{\#}(B),C_n\right\rangle$

[حسب تعريف التشابك الجبري]

$=\left\langle \overline{(T_1^{\#}\dots T_{n+1}^{\#}(B)},C_n\right\rangle$

[لأن التطبيق <.,.> مستمر]

$=\left\langle \overline{(T_1^{\#}\dots T_n^{\#}(B)},C_n\right\rangle$

[بحسب (6)]

$=\left\langle T^{\#}{}_1\dots T_n^{\#}(B),C_n\right\rangle$

[بحسب تعريف الانغلاق]

وبحسب المساعدة (4-3 (2)) نحصل على :

$=\left\langle B,(T_1^{\#}\dots T_n^{\#})^{\#}C_n\right\rangle$

$=\left\langle B,T_n\dots T_1(C_n)\right\rangle$

[باستخدام تعريف التشابك الجبري]

وهذا تناقض لأن

$T_n.T_{n-1}\dots T_1\,C_n\neq 0$

عندئذ نجد أن لكل $n\in N$ توجد متتابعة $\left\{\overline{T_1^{\#}\dots T_n^{\#}(B)}\right\}_{n\in N}$ من المثاليات اليمينية المغلقة متناقصة بثبات ، وبتطبيق مبرهنة جيول – سنكلير المعممة نجد أن التطبيق Φ مستمر.

الحالة العامة وهي أن تكون B معدومة صفرياً نستنتجها من الجزء الأول من البرهان والمبرهنتين4-4 ، 4-5 كالاتي:

بما أن كل جبر-H^* هو جمع متعامد للمعدومة له و جبر -H^* معدومة صفرياً (مبرهنة 4-4) وأن Φ تشاكل نحصل على $\Phi(Ann(A))\subseteq Ann(B)=\{0\}$

ولذلك يمكن اعتبار A جبر- H^* معدوما صفرياً تحت التطبيق Φ ، بتطبيق المبرهنة 4-5 ، إذا كانت M مثالية مغلقة صغرى لـ B ، فإنه يوجد مثالية مغلقة صغرى J لـ A بحيث أن $\Phi(J)=M$. وبما أن M هي بسيطة تبولوجياً ، لذلك حسب الجزء الأول من لبرهان نحصل على أن التطبيق Φ يكون مستمرا .

نفرض أن $b\in\delta(\Phi)$ ، عندئذ يوجد متتابعة $\{a_n\}$ في A بحيث أن

$\lim a_n=0,\lim\Phi(a_n)=b$

والأن ، لكل $y\in M$ يوجد $x\in J$ بحيث أن $\Phi(x)=y$ وعليه نحصل

$0=\lim\Phi(a_n x)$

$=\lim\Phi(a_n)\Phi(x)\quad =by$

[لأن $a_n x\in J$ و Φ مستمرة و Φ تشاكل]

وبالطريقة نفسها نحصل على $yb=0$. ومنها نستنتج أن $0=M\delta(\Phi)=\delta(\Phi)M$ لأي مثالية مغلقة صغرى M لـ B . أي أن $0=B\delta(\Phi)=\delta(\Phi)B$ وعليه نحصل على $\delta(\Phi)\subseteq Ann(B)$. لذلك يكون $\delta(\Phi)=0$. بتطبيق مبرهنة البيأن المغلق نحصل على أن التطبيق Φ يكون مستمرا . وبهذا ينتهي البرهان.

المراجع

1) W. Ambrose, "**Structure theorems for a class of Banach algebras**" Trans. Amer. Math. Soc. 57 (1945), 364-386
2) M. Cabrera, J. Martinez and A. Rodriguez, "**Mal'cev H*-algebra**", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 103 (1988), 2905-2945.
3) M. Cabrera, J. Martinez and A. P. Rodriguez, "**Hilbert modules over H*–algebra in relation with Hilbert ternary**", in workshop on non-associative algebraic models, Nova Science Publisher, New York (1992), pp. 33 – 44.
4) M. Cabrera, J. Martinez and A. P. Rodriguez, "**Non-associative real H*–algebra**", Publ. Mat. 32(1988),267-274.
5) M. Cabrera, **Lectures notes in analysis**, University of Granada,(2000)
6) J. A. Cuenca and A. P. Rodriguez "**Isomorphisims of H*-algebra**", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 97 (1985), 93-99.
7) J. A. Cuenca and A. P. Rodriguez, "**Structure theory for non- communicative Jordan H*–algebra**", J. Algebra 106 (1987). 22-34
8) N. Jacobson, "**Structure of rings**", Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 38, providence R. I. (1968).
9) N. P. Jewell and A. M. Sinclair, "**Epimorphisms and derivations on $L^1(0,1)$ are continuos**", Bull. London Math. Soc., 8 (1979), 135 – 139.
10) B. E. Johnson, "**The uniqueness of the complete norm topology**", Bull. Amer. Math. Soc. 73(1967), 537 – 539.
11) I. Kaplansky, "**Dual rings**" Ann. Math.49 (1948), 689-701.
12) T. W. Palmer, "**Banach algebra and the general theory of *–algebra**", Cambridge University. Press, (1994).
13) D. G. Perez, "**Structure theorems for alternative H*-algebra**", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 94 (1983), 437-446.
14) A. P. Rodriguez, "**Jordan structure in analysis**", in Jordan algebras Proc. Conf. Oberwolfach August 9-15, 1992, W. Kaup. McCrimmon and H. Peterson (eds), du Guryter, Berlin, 1994, 97 – 186.
15) A. P. Rodriguez, "**The uniqueness of the complete norm topology in complete non-associative algebra**", J. Functional Analysis, 60(1985), 1-15.
16) A. P. Rodriguez, "**Continuity of densely valued homomorphisms into H*–algebras**", Quart. J. Math. Oxford (2), 46 (1995), 107-118.
17) P. P. Saworotnow, "**A generalized Hilbert space**", Duke Math. J. 35 (1968), 191-197.
18) J. R. Schue, "**Hilbert space methods in the theory of Lie**

algebra", Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 69-80.
19) A. M. Sinclair, "**Automatic continuity of linear operator**", Cambridge University. Press, (1975).
20) A. M. Sinclair, "**Continuous derivations on Banach algebra**", Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 166 – 170.
21) A. R. Villena, "**Continuity of derivations on H*–algebras**", Proc. Amer. Soc. 122 (1994), 821 – 826.
22) A. R. Villena, "**Automatic continuity in associative and non-associative context**", Irish Math. Soc. Bull., 46(2001), 43-76.
23) C. Viola Devapakkiam, "Hilbert space method in the theory of Jordan algebras II", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79 (1976), 307-319.

Jewell-Sinclair theorem and the continuity of homomorphism on *H**- algebras

Amir A. Mohammed
Ammar I. Edrees

Abstract

In this paper, we generalize the Jewell-Sinclair theorem to include not only associative Banach algebras but also the nonassociative Banach algebras. Our methods in extending the Jewell-Sinclair theorem is based on the theory of multiplication algebra of an arbitrary algebra and another techniques, which is the standard method in the nonassociative context in the Spanish school.

Furthermore, we give as an application, example of our generalization of the Jewell-Sinclair theorem, the well–known result proved by Rodriguez that asserts the automatic continuity of a surjective homomorphisim on a nonassociative H- algebras. Our proof is based on essence the same lines of Rodriguez's proof.*